

Seminar Geometrie: Ricci-Krümmungen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten und metrischen Maßräumen

Prof. Dr. M. Zähle

Wintersemester 13/14

Einschreibungen im Sekretariat Frau Spilling oder zur ersten Veranstaltung

Der Gegenstand des Seminars liegt auf einem Grenzgebiet zwischen Geometrie, Analysis und Stochastik. Es richtet sich an Master-Studenten höherer Semester, Doktoranden und weitere Interessenten. Grundkenntnisse über differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind wünschenswert.

In der Riemannschen Geometrie ist der Begriff der Ricci-Krümmung ein klassischer mit vielen Anwendungen innerhalb und außerhalb der Mathematik, z.B. in der Einsteinschen Relativitätstheorie. Eine gute Übersicht findet man hier: http://en.wikipedia.org/wiki/Ricci_curvature .

In jüngerer Zeit hat man damit begonnen, ähnliche Begriffe für allgemeinere metrische Räume, insbesondere für Graphen, zu entwickeln. Dafür gibt es verschiedene Ansätze. Einer davon, nämlich der nach Ollivier, soll im zweiten Teil des Seminars im Sinne einer Einführung vorgestellt werden. Dabei geht es um eine Methode, die eng mit Markov-Ketten der Stochastik, optimalen Transportproblemen sowie Spektraleigenschaften zugehöriger Laplace-Operatoren verbunden ist und die auch für Fraktale interessant sein könnte. Darauf kann aber im Seminar nur ansatzweise eingegangen werden.

Der erste Teil der Themen dient einer Zusammenfassung der zugehörigen differentialgeometrischen Grundbegriffe und Beziehungen in möglichst einfacher Form (ohne Beweise) sowie einer kurzen Darstellung von gewissen Eigenschaften der Ricci-Krümmung.

Themen (werden zusammen mit Literaturangaben in Abhängigkeit der Teilnehmerstruktur noch präzisiert)

1. Riemannsche Mannigfaltigkeiten - Einführung bzw. Wiederholung von Grundbegriffen (5-6 Vorträge)

- Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, differenzierbare Abbildungen, Tangentialbündel, Vektor- (und Tensor)felder
- Parallelverschiebung, Geodätische und Exponentialabbildung
- Riemannsche Metrik und Levy-Civita-Zusammenhang, Characterisierung der zugehörigen kovarianten Ableitung, Geodätische als Kürzeste
- Riemannscher Krümmungstensor (im Seminar als operatorwertige Bilinearform), Schnittkrümmungen
- Ricci-Krümmung, skalare Krümmung, geometrische Eigenschaften

Literatur: [Le], [K1], [B], [La], [Z]

2. Ricci-Krümmung für metrische Räume und Markov-Ketten (Anzahl der Vorträge wird noch festgelegt)

- Markov-Ketten und Transport-Abstand in metrischen Räumen
- Grobe Ricci-Krümmung nach Ollivier

- Vergleich mit dem Riemannschen Fall
- Graphen-Version
- Eigenschaften

Literatur [O1], [O2], [JL], [?], [P]

Literatur

- [BLJ] Frank Bauer, Jürgen Jost, Shiping Liu: *Ollivier-Ricci curvature and the spectrum of the normalized graph Laplace operator*, Mathematical Research Letters, 19 (2012), 1185-1205.
- [B] Christian Bär: *Differential Geometry - Summer Term 2013*, Preprint, Uni Potsdam 2013.
- [JL] Jürgen Jost, Shiping Liu: *Ollivier's Ricci curvature, local clustering and curvature dimension inequalities on graphs*, <http://arxiv.org/abs/1103.4037>.
- [K1] Wilhelm Klingenberg: *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*, Springer 1973.
- [K2] Wilhelm Klingenberg: *Riemannian Geometry*, de Gruyter 1995.
- [La] Serge Lang: *Differential and Riemannian Manifolds*, Springer 1996.
- [Le] John M. Lee: *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer 1997.
- [O1] Jann Ollivier: *Ricci curvature of Markov chains on metric spaces*, J. Funct. Anal. 256 (2009), 810-864.
- [O2] Jann Ollivier: *A survey of Ricci curvature for metric spaces and Markov chains*, Adv. Studies in Pure Math. 57, 2010, 343-381.
- [P] Olaf Post: *Spectral Analysis on Graph-like Spaces*, Lecture Notes in Math. 2039, Springer 2012.
- [Z] M. Zähle: Vorlesungsskript Riemannsche Geometrie, Uni Jena.