

Seminar Geometrie/Wahrscheinlichkeitstheorie: Fraktale Geometrie Stochastischer Prozesse

Prof. Dr. M. Zähle

Wintersemester 14/15

Einschreibungen im Sekretariat Frau Spilling oder zur ersten Veranstaltung

Der Gegenstand des Seminars liegt auf einem Grenzgebiet zwischen Analysis, Geometrie und Stochastik. Es richtet sich an Master-Studenten, Doktoranden und weitere Interessenten. Schwerpunkt des Seminars sind fraktale Eigenschaften zufälliger Prozesse und Felder, deren Verteilungsgesetze gewisse Skalierungseigenschaften besitzen. Wir interessieren uns hauptsächlich für fraktale Dimensionen von Pfaden, Graphen, Bildern oder Nullstellenmengen ihrer Realisierungen.

Zunächst werden relevante Begriffe aus der Theorie stochastischer Prozesse, insbesondere der Gauß-Prozesse, bereit gestellt. Anschließend behandeln wir die geometrischen Hausdorff-Maße und zugehörige Dimensionen sowie Verfahren zu ihrer Bestimmung. Eine ausführliche Darstellung ihrer Anwendung wird am Beispiel der gebrochenen Brownschen Bewegung gegeben. Schließlich sollen übersichtsmäßig einige allgemeinere Resultate, evtl. auch für Minkowski-Dimensionen aus der z.T. jüngeren Literatur präsentiert werden.

Vorkenntnisse aus der fraktalen Geometrie oder aus der Theorie der stochastische Prozesse bei einzelnen Teilnehmern sind begrüßenswert - die Themenwahl kann dann abgestimmt werden - aber nicht Voraussetzung.

Themen (werden zusammen mit Literaturangaben in Abhängigkeit der Teilnehmerstruktur z.T. noch präzisiert)

1. **Gauß-Prozesse - Einführung bzw. Wiederholung von Grundbegriffen** (2-3 Vorträge)
 - Konstruktion über endlichdimensionale Verteilungen erläutern, Beispiele
 - Existenz Hölder-stetiger Modifikationen
 - Skalierungseigenschaft der gebrochenen Brownschen Bewegung, Nichtdifferenzierbarkeit am Beispiel des Wiener-Prozesses

Literatur: []

2. **Hausdorff-Maße und Hausdorff-Dimension** (2-3 Vorträge)
 - Konstruktion nach Caratheodory
 - Begründung für den Dimensionsbegriff
 - Obere Abschätzung für Graphen von Hölder-stetigen Funktionen
 - Potentialtheoretische Methode zur unteren Abschätzung
 - Anwendung auf stochastisch selbstähnliche zufällige Funktionen

Literatur: [],

3. **Dimension von Bildern und Graphen für spezielle Klassen von stochastischen Prozessen und Feldern** (Anzahl der Vorträge wird noch festgelegt)
 -
 -

•
Literatur: [],

Die folgende Liste wird noch ergänzt:

Literatur

- [D] P.L. Davies, *The Exact Hausdorff measure of the zero set of certain stationary Gaussian processes*, Ann. Probab. 5 (1977), 740-755.
- [F] K. J. Falconer, *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*, 2d Edition, Wiley 2003.
- [MK] H.P. McKean, *Hausdorff-Besicovich dimension of Brownian motion paths*, Duke Math. J. 22 (1955), 229-234.
- [M] P. Mörters, *Fractal geometry*, Vorlesungsskript Uni Kaiserslautern 2001.
- [MP] P. Mörters, Y. Peres, *Brownian motion*, Cambridge Univ. Press 2010.
- [PS] Y. Peres, P. Sousi, *Dimension of Fractional Brownian motion with variable drift*, Preprint 2013, arXiv:1310.7002[math.PR]
- [X] Y. Xiao, *Dimension results for Gaussian vector fields and index- α stable vector fields*, Ann. Probab. 23 (1995), 273-291.
- [Z1] M. Zähle, *Fractal geometry*, Vorlesungsskript Uni Jena.
- [Z] M. Zähle, *Fraktale stochastische Prozesse*, Vorlesungsskript Uni Jena.