wieder $\mathcal{H}^m$-messbar sind; f ist Lipschitz auf $B_i^k \cap A$. Also ist h_k $\mathcal{H}^m$-messbar. Wegen $h_k(y) \uparrow \mathcal{H}^0(f^{-1}(y) \cap A)$, $k \to \infty$, folgt (ii). □

Lemma 4.2.2. *(Lokale Linearisierung der Abbildung)*
f sei wie in Satz 4.1.2. Für alle $\theta > 1$ besitzt

$$D := \{x \in U : Df(x) \quad \textit{injektiv}\ \}$$

eine abzählbare Überdeckung mit Borel-Mengen C_i derart, dass $f|_{C_i}$ injektiv ist und ein Isomorphismus $L_i \in GL(m)$ existiert mit

(i) $Lip(f \circ L_i^{-1}) \leq \theta$ und $Lip(L_i \circ (f|_{C_i})^{-1}) \leq \theta$, wobei $f \circ L_i^{-1}$ als Abbildung auf $L_i(C_i)$ und $L_i \circ (f|_{C_i})^{-1}$ als Abbildung auf $f(C_i)$ gesehen wird.

(ii) $\theta^{-1}|L_i(v)| \leq |Df(x)(v)| \leq \theta |L_i(v)|$ für alle $x \in C_i$ und $v \in \mathbb{R}^m$.

(iii) $\theta^{-m}|\det(L_i)| \leq J_m f(x) \leq \theta^n |\det(L_i)|$ für alle $x \in C_i$.

Das Lemma besagt, dass man die Abbildung f beliebig gut lokal nähern kann durch umkehrbare lineare Abbildungen. Lokal verhält sich Df dann fast wie eine Konstante und folglich auch $J_m f$.

Beweis. Betrachten $GL(m)$ als topologische Gruppe, interpretiert als Unterraum der $(m \times m)$-Matrizen und ausgestattet mit der von $\mathbb{R}^{m^2}$ induzierten Topologie.Wählen $\theta^{-1} + \varepsilon < 1 < \theta - \varepsilon$ und eine abzählbare dichte Teilmenge $\{L_1, L_2, ...\}$ von $GL(m)$. Für $j, k \in \mathbb{N}$ betrachte die Mengen

$$\begin{aligned} &E_{j,k} := \\ &\big\{x \in D : (\theta^{-1} + \varepsilon)|L_j(v)| \leq |Df(x)v| \leq (\theta - \varepsilon)|L_j(v)| \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^m \text{ und} \\ &\quad |f(x) - f(y) - Df(x)(x-y)| \leq \varepsilon |L_j(x-y)| \text{ ,falls } |x-y| < 1/k\} \ . \end{aligned} \tag{4.2}$$

(werden später genutzt, um D zu überdecken).

$E_{j,k}$ ist eine Borel-Menge, wie aus der Borel-Messbarkeit von $\partial f / \partial x_i$ und der Stetigkeit von f folgt.
Offensichtlich folgt (ii) aus (4.2) für alle $x \in E_{j,k}$.

Zeigen nun, dass wegen (4.2) auch (iii) gilt für alle $x \in E_{j,k}$: Mit

$$J_m = \sqrt{\det(Df^* \circ Df)} \quad \text{und} \quad Df = Df \circ L_j^{-1} \circ L_j$$

folgt

$$\begin{aligned}
J_m f &= \sqrt{\det(L_j^* \circ (Df \circ L_j^{-1})^* \circ Df \circ L_j^{-1} \circ L_j)} \\
&= |\det(L_j)| \sqrt{\det((Df \circ L_j^{-1})^* \circ Df \circ L_j^{-1})} \\
&= |\det(L_j)| \mathcal{L}^m(conv\ \left\{Df \circ L_j^{-1}(e_1), ..., Df \circ L_j^{-1}(e_m)\right\}) \\
&\leq |\det(L_j)| |Df \circ L_j^{-1}(e_1)| \cdots |Df \circ L_j^{-1}(e_m)| \\
&\leq (\theta - \varepsilon)^m |\det(L_j)| |e_1| \cdots |e_m| \\
&= (\theta - \varepsilon)^m |\det(L_j)| \ ,
\end{aligned}$$

die letzte Ungleichung wegen (4.2). Das zeigt die rechte Ungleichung in (iii). Für die linke Unglichung in (iii) nutzt man die Injektivität von $Df(x) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, sie impliziert, dass $V_m := Df(x)(\mathbb{R}^m)$ ein m-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist. Somit folgt die Existenz einer orthogonalen Abbildung $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass $H(V_m) = \mathbb{R}^m$ und daher

$$H \circ Df(x) := L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \quad \text{und } L \in GL(m) \ . \tag{4.3}$$

Das sieht man wie im Beweis von Satz 4.1.1. H und L hängen von x ab. Nutzt man wiederum (4.2), so erhält man

$$\begin{aligned}
|\det(L_j)| &= |\det(L_j \circ L)| |\det(L)| \\
&\leq |L_j \circ L^{-1}(e_1)| \cdots |L_j \circ L^{-1}(e_m)| |\det(L)| \\
&\leq (\theta^{-1} + \varepsilon)^{-m} |Df(x) \circ L^{-1}(e_1)| \cdots |Df(x) \circ L^{-1}(e_m)| |\det(L)| \\
&= (\theta^{-1} + \varepsilon)^{-m} |H^{-1}(e_1)| \cdots |H^{-1}(e_m)| |\det(L)| \\
&= (\theta^{-1} + \varepsilon)^{-m} |\det(L)| \\
&= (\theta^{-1} + \varepsilon)^{-m} J_m f(x) \ .
\end{aligned}$$

Das zeigt die linke Ungleichung in (iii).

Zeigen nun, dass für alle Teilmengen $S \subset E_{j,k}$ mit Durchmesser $|S| < 1/k$ die Ungleichung (i) gilt mit (S, L_j) anstelle (C_i, L_i): Seien $x, y \in S$. Wegen (4.2) hat man

$$|f(x) - f(y)| \leq |Df(x)(x-y)| + \varepsilon |L_j(x-y)| \leq \theta |L_j(x-y)|$$

und

$$|f(x) - f(y)| \geq |Df(x)(x-y)| - \varepsilon |L_j(x-y)| \geq \theta^{-1} |L_j(x-y)| \ .$$

Daraus folgt, dass für $a, b \in L_j(S)$

$$|f \circ L_j^{-1}(a) - f \circ L_j^{-1}(b)| = |f(L_j^{-1}(a)) - f(L_j^{-1}(b))| \leq \theta |a - b| \ ,$$

d.h. die linke Seite von (i). Andererseits ist $f|_S$ injektiv, und für $a, b \in f(S)$ hat man

$$L_j \circ (f|_S)^{-1}(a) - L_j \circ (f|_S)^{-1}(b)| \leq \theta |f(x) - f(y)| = \theta |a - b| \ ,$$

wobei man die zweite Zeile oben nutzt mit $x := (f|_S)^{-1}(a) \in S$ und $y := (f|_S)^{-1}(b) \in S$. Das ergibt die rechte Seite von (i).
Das bedeutet aber, dass für $E_{j,k}$ eine abzählbare Überdeckung mit den geforderten Eigenschaften existiert: Zum Beispiel kann man ein abzählbares System aus Kugeln mit rationalen Mittelpunkten, rationalen Radien und Durchmesser $< 1/k$ finden, welches $E_{j,k}$ überdeckt.

Letztlich bleibt nachzuweisen, dass die $E_{j,k}$ ene Überdeckung von D bilden; dann folgt die Behauptung.

Nutzen wiederum die Darstellung (4.3) für fixiertes $x \in D.$, d.h.

$$|Df(x)v| = |Lv| \quad , \quad v \in \mathbb{R}^m \ .$$

Aus der Dichtheit von $\{L_1, L_2, ...\} \in GL(m)$ und $L \in GL(m)$ folgt die Existenz eines $j \in \mathbb{N}$ mit

$$|L_j \circ L^{-1}| \leq (\theta^{-1} + \varepsilon)^{-1} \quad \text{und} \quad |L \circ L_j^{-1}| \leq \theta - \varepsilon \ ,$$

und mit $L_j = L_j \circ L^{-1} \circ L$, $L = L \circ L_j^{-1} \circ L_j$ kann man

$$(\theta^{-1} + \varepsilon)|L_j(v)| \leq |L(v)| = |Df(x)v| \leq (\theta - \varepsilon)|L_j(v)$$

folgern, d.h. die erste Bedingung in (4.2) gilt für obiges x. Wegen der Differenzierbarkeit von f in x folgt

$$|f(x) - f(y) - Df(x)(x - y)| = \alpha(x - y)|x - y| \leq \alpha(x - y)|L_j^{-1}||L_j(x - y)| \ ,$$

wobei $0 \leq \alpha(x - y) \to 0$ für $x - y \to 0$, also $\alpha(x - y) < \varepsilon$ für $|x - y| << 1$.
Somit gilt auch die zweite Bedingung in (4.2) für hinreichend grosse k.
Daraus folgt aber $x \in E_{j,k}$ für k genügend gross. $\square$